Ничего кроме относительности

Palash B. Pal

Saha Institute of Nuclear Physics, 1/AF Bidhan-Nagar, Calcutta 700064, INDIA

Перевод с английского: Dem
Вёрстка в $\LaTeX\,2_\varepsilon$: Константин (Const) Михайленко
Оригинал статьи: `http://arxiv.org/PS_cache/physics/pdf/0302/0302045.pdf`
Если Вы обнаружите в переводе ошибки, неправильную терминологию, опечатки в формулах и т. п., пожалуйста, сообщите об этом мне по адресу `dem@devilstar.ru`

Аннотация

В работе даётся вывод наиболее общего закона преобразования пространственно-временных координат, согласующегося с принципом относительности. Таким образом, данная работа включает в себя результаты, следующие из теории относительности Галилея и из специальной теории относительности Эйнштейна. Закон сложения скоростей выводится как следствие обеих указанных теорий. Также показано, почему теории Галилея и Эйнштейна — единственные теории, не противоречащие принципу относительности.

Исторически, специальная теория относительности Эйнштейна была создана для объяснения свойств света. Даже сегодня учебники и другие книги по специальной теории относительности включают описания мысленных экспериментов со светом. Формула преобразований Лоренца, формула релятивистского сложения скоростей и другие важные формулы специальной теории относительности выводятся, используя свойства световых сигналов.

В основе специальной теории относительности лежат два постулата (аксиомы). Первый — принцип относительности, который утверждает, что физические законы одинаковы в любых инерциальных системах отсчёта. Второй принцип, который и отличает специальную теорию относительности Эйнштейна от более ранней теории относительности Галилея — это утверждение о постоянстве скорости света в вакууме.

Здесь возникает интересный вопрос. Предположим, что кто-либо возьмёт принцип относительности, но отбросит второй постулат Эйнштейна (о постоянстве скорости света в вакууме) и попытается вывести самые общие уравнения, согласующиеся с принципом относительности. Такие формулы содержали бы результаты теорий и

Эйнштейна и Галилея. В литературе этот вопрос уже рассматривался [1–11], и авторы в одних случаях выводили релятивистский закон сложения скоростей, в других случаях — уравнения преобразования пространственно-временных координат. В этой работе мы предлагаем несколько иной подход, в результате которого оба закона — релятивистский закон сложения скоростей и закон преобразования пространственно-временных координат, выводятся из одного утверждения.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчёта S и S', причём вторая перемещается со скоростью v по оси x относительно первой. Координаты и время в системе отсчёта S мы будем обозначать как x и t, а в системе отсчёта S' они будут обозначены штрихом. Функции преобразования пространственно-временных координат имеют вид:

$$x' = X(x, t, v)\,, \tag{1}$$

$$t' = T(x, t, v)\,, \tag{2}$$

и наша задача состоит в том, чтобы эти функции найти. Некоторые их свойства мы можем определить уже сейчас. Во-первых, принцип относительности утверждает, что, если мы обратим эти выражения, мы должны получить те же самые функциональные зависимости:

$$x = X(x', t', -v)\,, \tag{3}$$

$$t = T(x', t', -v)\,. \tag{4}$$

Отметим, что здесь третий аргумент обеих функций равен $-v$, так как это — скорость системы отсчёта S относительно S'. Используя выражения (1) и (2) мы можем теперь переписать выражения (3) и (4) следующим образом:

$$x = X(X(x, t, v), T(x, t, v), -v)\,, \tag{5}$$

$$t = T(X(x, t, v), T(x, t, v), -v)\,, \tag{6}$$

что неявно накладывает некоторые ограничения на возможные формы функций. Более того, однородность пространства требует, чтобы координату x также можно было обратить. В этом случае, переменные x и v изменяют знак, так же как и x'. Другими словами:

$$X(-x, t, -v) = -X(x, t, v)\,, \tag{7}$$

$$T(-x, t, -v) = T(x, t, v)\,. \tag{8}$$

Теперь учтём однородность пространства и времени. Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси x, такой, что его концы находятся в точках x_1 и x_2 системы отсчёта S, и при этом $x_1 > x_2$. В системе отсчёта S', его концы будут находиться в точках $X(x_1, t, v)$ и $X(x_2, t, v)$, и длина стержня будет равна

$$l' = X(x_2, t, v) - X(x_1, t, v)\,. \tag{9}$$

Предположим, что мы переместили стержень так, что его конец, который был в точке x_1, теперь находится в точке $x_1 + h$. Его длина в системе отсчёта S не должна измениться при перемещении по оси x (это утверждение следует из однородности пространства), поэтому, другой конец стержня окажется в точке $x_2 + h$. В системе отсчёта S' его концы будут находиться в точках $X(x_2 + h, t, v)$ и $X(x_1 + h, t, v)$. Однородность пространства подразумевает, что перемещение стержня не должно влиять на его длину также и в системе отсчёта S', поэтому:

$$l' = X(x_2 + h, t, v) - X(x_1 + h, t, v)\,. \tag{10}$$

Используя выражения (9) и (10), можно вывести, что:

$$X(x_2 + h, t, v) - X(x_2, t, v) = X(x_1 + h, t, v) - X(x_1, t, v)\,. \tag{11}$$

Разделив обе части выражения на h и отыскав предел при $h \to 0$, получим:

$$\left.\frac{\partial X}{\partial x}\right|_{x_2} = \left.\frac{\partial X}{\partial x}\right|_{x_1}. \tag{12}$$

Следствием того, что точки x_2 и x_1 выбраны полностью произвольно, будет утверждение, что частная производная $\partial X/\partial x$ есть константа и не зависит от выбора точки x. Таким образом, функция $X(x, t, v)$ должна быть линейной по аргументу x. Подобным же способом (используя однородность времени) достаточно просто показать, что обе функции $X(x, t, v)$ и $T(x, t, v)$ линейны по аргументам x и t. В таком случае мы делаем простейший выбор и считаем, что начала обеих систем отсчёта совпадают, то есть $x = t = 0$ (следовательно и $x' = t' = 0$). При этом формулы можно записать в следующем виде:

$$X(x, t, v) = A_v x + B_v t\,, \tag{13}$$

$$T(x, t, v) = C_v x + D_v t\,, \tag{14}$$

где индекс v у коэффициентов A, B, C и D означает, что они являются функциями только от относительной скорости v. Выражения (7) и (8) в этом случае дают:

$$A_{-v} = A_v\,, \qquad B_{-v} = -B_v\,, \qquad C_{-v} = -C_v\,, \qquad D_{-v} = D_v\,. \tag{15}$$

Другими словами, A и D — чётные функции, в то время как B и C — нечётные функции от v. Учитывая эти свойства, мы можем теперь использовать выражения (5) и (6), чтобы получить следующие условия:

$$A_v^2 - B_v C_v = 1\,, \tag{16}$$

$$B_v(A_v - D_v) = 0\,, \tag{17}$$

$$C_v(A_v - D_v) = 0\,, \tag{18}$$

$$D_v^2 - B_v C_v = 1\,. \tag{19}$$

К сожалению, функции A, B, C и D не могут быть найдены, исходя только из этих четырёх уравнений. Причина проста. Выражения (17) и (18) указывают на два возможных решения. Допустим, что $B_v = C_v = 0$, тогда оставшиеся уравнения имеют решение $A_v = D_v = 1$, которое является тривиальным преобразованием пространственно-временных координат. Данное решение математически корректно, но не приемлемо из физических соображений для произвольных значений v. Таким образом, необходимо рассмотреть иное решение, которое даёт

$$D_v = A_v\,, \tag{20}$$

$$C_v = \frac{A_v^2 - 1}{B_v}\,. \tag{21}$$

Получаем, что две функции от v, введённые в выражениях (13) и (14) независимы.

Мы можем и далее сократить число независимых функций, если заметим, что по нашему определению начало отсчёта системы S' перемещается со скоростью v относительно системы отсчёта S, то есть через время t, оно должно оказаться в точке $x = vt$. Другими словами, $x' = 0$, когда $x = vt$. Отсюда следует, что

$$B_{-v} = -vA_v\,, \tag{22}$$

и теперь мы можем записать уравнение преобразования пространственно-временных координат, используя только одну неизвестную функцию A_v. В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_v & -vA_v \\ -\dfrac{A_v^2 - 1}{vA_v} & A_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Пока вид функции A_v неизвестен, за исключением двух фактов: она является чётной по v и значение функции должно равняться единице при $v = 0$. Для дальнейших рассуждений рассмотрим третью систему отсчёта S", которая перемещается со скоростью u относительно системы отсчёта S'. Тогда

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_u & -uA_u \\ -\dfrac{A_u^2 - 1}{uA_u} & A_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_v & -vA_v \\ -\dfrac{A_v^2 - 1}{vA_v} & A_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_uA_v + (A_v^2 - 1)\dfrac{uA_u}{vA_v} & -(u+v)A_uA_v \\ -(A_u^2 - 1)\dfrac{A_v}{uA_u} - (A_v^2 - 1)\dfrac{A_u}{vA_v} & A_uA_v + (A_v^2 - 1)\dfrac{vA_v}{uA_u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{24}$$

Однако, из выражения (20) следует, что два диагональных элемента этой матрицы должны быть равны, что приводит к:

$$\frac{A_v^2 - 1}{v^2 A_v^2} = \frac{A_u^2 - 1}{u^2 A_u^2}\,. \tag{25}$$

Левая сторона этого уравнения зависит только от v, в то время как правая сторона зависит только от u. Части уравнения могут быть равны в единственном случае — если обе части — константы. Обозначив эту константу как K, получим

$$A_v = \frac{1}{\sqrt{1 - Kv^2}}\,. \tag{26}$$

Используя эту форму записи в выражении (23), мы таким образом получаем, что самое общее уравнение преобразования пространственно-временных координат, согласующееся с принципом относительности, имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - Kv^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -Kv & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Существует ещё одна вещь, на которую следует обратить внимание: закон сложения скоростей может быть непосредственно выведен из наших предыдущих рассуждений. Для этого давайте рассмотрим систему отсчёта S", движущуюся относительно S со скоростью w. Тогда, в выражении (24), диагональные элементы матрицы должны равняться A_w:

$$A_w = A_u A_v + (A_v^2 - 1)\frac{uA_u}{vA_v} = A_u A_v (1 + Kuv)\,. \tag{28}$$

При выводе на последнем шаге было использовано определение K, которое следует из выражения (25). Учитывая форму функции A из выражения (26), легко вывести следующую формулу

$$w = \frac{u + v}{1 + Kuv}\,, \tag{29}$$

которая и определяет закон сложения скоростей.

Конечно, специальная теории относительности должна содержать дополнительное предположение, которое позволит определить значение K. В случае теории относительности Галилея, это дополнительное предположение обнаруживается в форме утверждения об универсальности времени, что означает $t' = t$ для любого v. Очевидно, из этого вытекает требование $K = 0$. Дополнительное предположение в специальной теории относительности Эйнштейна — постоянство скорости света в вакууме. Из выражения (29), легко видеть, что $K^{-1/2}$ — инвариантная скорость, независимая от системы отсчёта. Отсюда, $K = 1/c^2 > 0$. Очевидно, что в обоих случаях мы получаем соответствующий закон преобразования пространственно-временных координат из выражения (27) и закон сложения скоростей из выражения (29).

Из приведённых рассуждений может показаться, что существует ещё одна логическая возможность: $K < 0$. На самом деле такое предположение приводит к противоречию. Чтобы увидеть это, сначала рассмотрим выражение (26), заметив, что только положительные значения подкоренного выражения могут быть использованы справа, потому что мы хотим, чтобы A_v стремилась к единице, когда v исчезает. Таким образом, $A_v \geqslant 0$ для любого v. Однако, если K отрицательно, то есть $K = -1/C^2$ для некоторого конечного значения C, мы можем получить из выражения (28), что

$A_w < 0$, если выбрать достаточно большие значения u и v, которые удовлетворяют условию $uv > C^2$.

Здесь следует сделать одно замечание. В случае специальной теории относительности Эйнштейна можно предположить наличие противоречия, при котором A_v становится мнимым, если $v > c$. Но такие большие скорости недостижимы в специальной теории относительности Эйнштейна из-за структуры закона сложения скоростей в выражении (29), который показывает, что нельзя получить $w > c$, если и u и v — меньше чем c. При $K = -1/C^2$, дело обстоит иначе. Можно сложить две скорости, обе меньше чем C, и результат сложения может быть больше C. Например, если скорость S' равна $C/2$ относительно S, и если S" движется со скоростью $C/2$ относительно S', то скорость S" относительно системы отсчёта S будет равна $4C/3$. Таким образом, скорости, большие чем C не могут быть исключены из теории, но такие скорости предполагают возможность $A_w < 0$, как было отмечено выше. Следовательно, такое предположение противоречиво.

Таким образом, мы вывели самый общий закон преобразования пространственно-временных координат и закон сложения скоростей, согласующийся с принципом относительности, и показали, что законы Галилея и законы Эйнштейна — единственно возможные. Использованный метод более всего напоминает метод Singh'а [10], но имеет и важные отличия. В своих преобразованиях Singh использовал некоторые свойства закона сложения скоростей, выведенного Mermin'ом [7]. Мы же их не использовали. С другой стороны, мы прямо использовали принцип однородности пространства, чтобы вывести свойства симметрии функций A, B, C и D, которые в итоге вошли в выражение (15) и использовали их, чтобы получить выражения (16–19). Но самое важное различие, по нашему мнению — то, что, ранее использовали различные цепочки рассуждений для вывода законов преобразования пространственно-временных координат и формулы сложения скоростей. Наш же метод позволяет получать оба закона одновременно.

Благодарности. Я благодарю P. Bhattacharjee, B. P. Das, J. Samuel, D. Sen и S. Sinha за то, что они терпеливо слушали мои аргументы и критиковали их, а также за некоторые ссылки, которые я, возможно, пропустил бы.

Список литературы

[1] R. Weinstock: *New approach to special relativity*, Am. J. Phys. 33 (1965) 540–645.

[2] V. Mitavalský: *Special relativity without the postulate of constancy of light*, Am. J. Phys. 34 (1966) 825.

[3] A. R. Lee, T. M. Kalotas: *Lorentz transformations from the first postulate*, Am. J. Phys. 43 (1975) 434–437.

[4] J.-M. L-evy-Leblond: *One more derivation of the Lorentz transformation*, Am. J. Phys. 44 (1976) 271–277.

[5] W. Rindler: *Essential Relativity* (Springer-Verlag, 2nd edition, 1977). See § 2.17.

[6] A. M. Srivastava: *Invariant speed in special relativity*, Am. J. Phys. 49 (1981) 504–505.

[7] N. D. Mermin: *Relativity without light*, Am. J. Phys. 52 (1984) 119–124.

[8] H. M. Schwartz: *Deduction of the general Lorentz transformations from a set of necessary assumptions*, Am. J.‘Phys. 52 (1984) 346–350.

[9] H. M. Schwartz: *A simple new approach to the deduction of the Lorentz transformations*, Am. J. Phys. 53 (1985) 1007–1008.

[10] S. Singh: *Lorentz transformations in Mermin's relativity without light*, Am. J. Phys. 54 (1986) 183–184.

[11] A. Sen: *How Galileo could have derived the special theory of relativity*, Am. J. Phys. 62 (1994) 157–162.